Valentin
KILIAN

Critère de Weyl

ENS Rennes
Source : FGN Analyse 2

Th Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de $[0,1]$. S'équivalent

i. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie

ii. Pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, on a
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt$$

iii. Pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$, on a $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Preuve.

$(i) \Rightarrow (ii)$ ▸ Remarquons que $\frac{1}{n} S_n(a,b) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{[a,b]}(u_k)$

et $\int_0^1 \mathbb{1}_{[a,b]}(t)\,dt = b-a$. Par suite la propriété (ii) est vérifiée pour les fonctions indicatrices d'un segment.

▸ Puisqu'une fonction en escalier est combinaison linéaire de fct° indicatrices de segment alors la propriété est vérifiée (par linéarité) pour toutes les fonctions en escalier.

▸ Soit maintenant $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. Par densité des fction en escalier il existe $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ en escalier tq $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) - \int_0^1 f\right| \underset{IT}{\leq} \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(u_k)-g(u_k))\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k) - \int_0^1 g\right| + \left|\int_0^1 g - \int_0^1 f\right|$$
$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \underbrace{|f(u_k)-g(u_k)|}_{\leq\varepsilon} + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k) - \int_0^1 g\right| + \int_0^1 \underbrace{|g-f|}_{\leq\varepsilon}$$
$$\leq 2\varepsilon + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k) - \int_0^1 g\right|$$

Comme g est en escalier alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n > N$ on a
$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k) - \int_0^1 g\right| \leq \varepsilon$ donc $\forall n > N$ $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) - \int_0^1 f\right| \leq 3\varepsilon$

Ce qui conclut

$\underline{(ii) \Rightarrow (iii)}$ Si $p \in \mathbb{Z}^*$ alors

$$x \longmapsto e^{2i\pi p x} = \cos(2\pi p x) + i \sin(2\pi p x)$$

On applique alors (ii) à $\cos(2\pi p x)$ et $\sin(2\pi p x)$ puis par linéarité on a

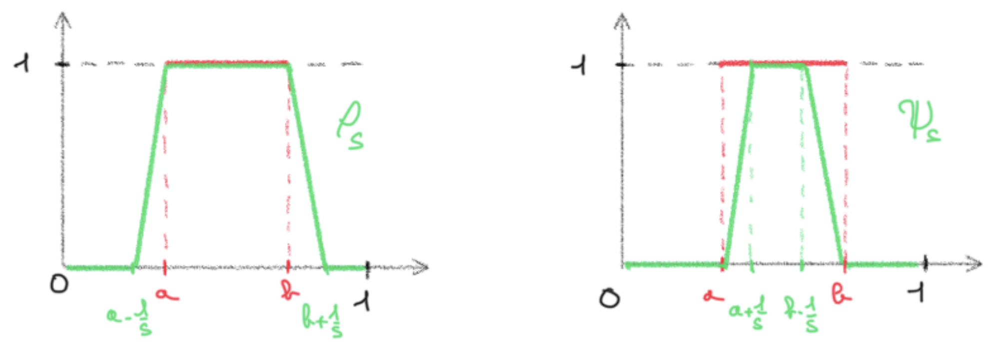
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \cos(2\pi p x)dx + i \int_0^1 \sin(2\pi p x)dx = 0$$

$\underline{(iii) \Rightarrow (i)}$

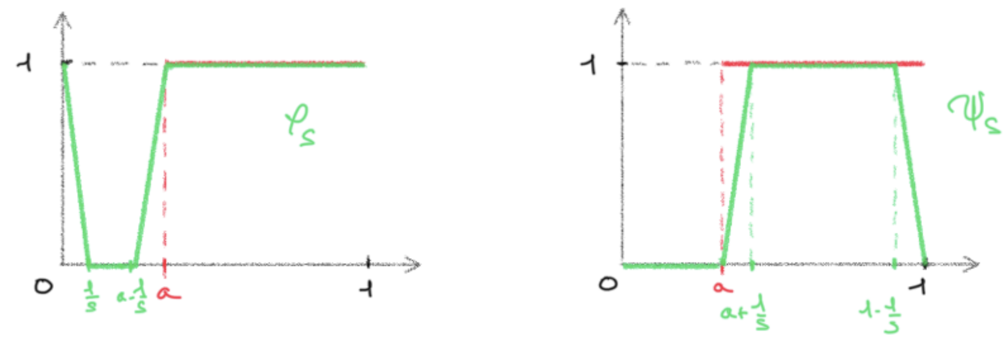
- La propriété (ii) est vrai pour $x \mapsto e^{2i\pi p x}$
- Par linéarité (ii) est vrai pour tous les polynômes trigonométriques de la forme $x \mapsto \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p e^{2i\pi p x}$

- D'après le <u>th de Fejer</u> toutes fonctions $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ tq $f(0) = f(1)$ est limite uniforme d'une suite de polynome trigonométrique. On conclut comme dans (i) $\Rightarrow$ (ii) que la propriété (ii) est vrai pour toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ tq $f(0) = f(1)$. On note $\mathcal{C}_p$ l'ensemble de ces fonctions.
- Soit $0 \leq a < b \leq 1$ Pour $s \in \mathbb{N}^*$ assez grand on définit φ_s et ψ_s dans $\mathcal{C}_p$ comme sur le dessin.

Cas $0 < a < b < 1$



Cas $0 < a < b = 1$



Le cas $0 = a < b < 1$ est symétrique
Le cas $0 = a < b = 1$ est trivial

Notons $I = [a, b]$ on a $\psi_s \leq 1\!\!1_I \leq \varphi_s$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \psi_s(u_k) \leq \frac{S_n(a,b)}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \varphi_s(u_k)$$

Par le point précédent
$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \psi_s(u_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \psi_s = b - a - \frac{1}{s}$$
$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \varphi_s(u_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \varphi_s = b - a + \frac{1}{s}$$

Soit $\varepsilon > 0$, soit s tq $\frac{1}{s} < \varepsilon$. Pour n assez grand on a
$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \psi_s(u_k) \geq \int_0^1 \psi_s - \varepsilon \geq b - a - 2\varepsilon$$
et
$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \varphi_s(u_k) \leq \int_0^1 \varphi_s + \varepsilon \leq b - a + 2\varepsilon$$

D'où
$$\left| \frac{S_n(a,b)}{n} - (b-a) \right| \leq 2\varepsilon$$
et le résultat.

<u>NB</u> La preuve dans FGN Analyse 2 est partiellement fausse, la version présentée ici est corrigée tout en étant plus courte.