Une autre méthode de calcul de la Transformée de Fourier de la gaussienne
Version préliminaire non relu

Valentin KILIAN
Ecole Normale Supérieure de Rennes

12 août 2022

La transformée de Fourier de la gaussienne est une fonction importante qui apparait dans de nombreux domaines des mathématiques notamment en théorie des probabilités ou en étude des équations différentielles. Il existe plusieurs méthodes classiques pour calculer cette transformée : une méthode qui utilise une équation différentielle, une autre qui utilise le théorème de prolongement holomorphe et une dernière qui utiliser le calcul d'une intégrale curviligne. On pourra par exemple consulté [1]. On présente ici une autre méthode de calcul de la transformée de Fourier de la gaussienne qui repose sur une inversion série-intégrale, cette méthode est probablement l'une des plus calculatoire et des plus longue possible mais c'est un bel exemple non triviale d'utilisation du théorème de sommation L^1. Dans la suite on estimera connu l'ensemble des résultats classique sur la fonction Γ d'Euler définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 0.1. *Si $x \in \mathbb{R}$ alors on a*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-ixt} dt = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Démonstration.
Etape 1 : Inversion série-intégrale : Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque tout d'abord que par définition de l'exponentielle complexe si $t \in \mathbb{R}$ alors

$$e^{-ixt} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-ixt)^n}{n!}$$

Ainsi sous réserve de justification :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-ixt} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-ixt)^n}{n!} dt = \sum_{n \geq 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{(-ixt)^n}{n!} dt = \sum_{n \geq 0} \frac{(-ix)^n}{n!} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} t^n dt}_{=I_n}$$

Reste à calculer I_n, on distingue selon la parité de n :

- Si n est impair alors $t \longmapsto e^{-\frac{t^2}{2}} t^n$ est impaire et donc $I_n = 0$
- Si n est pair notons le $n = 2p,\ p \in \mathbb{N}$. La fonction $t \longmapsto e^{-\frac{t^2}{2}} t^n$ est paire, on peut donc écrire :

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} t^{2p} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t^{2p} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u} (2u)^p \frac{du}{\sqrt{2u}}.$$

Où l'on a effectué le changement de variable $u = \frac{t^2}{2}$, par suite :

$$I_n = \sqrt{2}.2^p. \int_0^{+\infty} u^{p-\frac{1}{2}} e^{-u} du = \sqrt{2}.2^p.\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right).$$

Or par intégration par partie on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ donc

$$\Gamma(p + \frac{1}{2}) = \prod_{k=1}^{p} \left(p - k + \frac{1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{2}(2p-(2k-1))$$
$$= \frac{(2p)!}{2^p} \frac{1}{2p.(2p-1)...2} . \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(2p)!}{2^{2p}p!} . \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!} . \sqrt{\pi}$$

où on a reconnue le produit des entiers impairs inférieurs à $2p$.

Par suite

$$I_{2p} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2^p} \frac{(2p)!}{p!}$$

Finalement

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-ixt} dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-ix)^{2p}}{(2p)!} \frac{\sqrt{2\pi}}{2^p} \frac{(2p)!}{p!} = \sqrt{2\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

■

Ainsi l'inversion série-intégrale nous a bien permis de calculer la transformée de Fourier de la Gaussienne.

Etape 2 : Justification : Il nous reste donc à justifier l'inversion effectué au niveau de l'égalité rouge, pour se faire on applique le théorème de sommation L^1

Posons pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$

$$u_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{(-ixt)^n}{n!}.$$

Alors

$$\forall t \in \mathbb{R} \ \ |u_n(t)| \leq e^{-\frac{t^2}{2}} |x|^n \frac{|t|^n}{n!}$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}} |u_n(t)| dt = \frac{|x|^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} |t|^n dt = \frac{2|x|^n}{n!} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} |t|^n dt}_{J_n}.$$

Or avec le même changement de variable que précédemment :

$$J_n = \int_0^{+\infty} e^{-u} (\sqrt{2u})^n \frac{du}{\sqrt{2u}}.$$

On distingue encore une fois selon la parité de n :

▶ Si $n = 2p$

$$J_n = \frac{1}{2} I_{2p} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\pi}}{2^p} \frac{(2p)!}{p!}$$

On a donc

$$\frac{2|x|^n}{n!} J_n = \frac{2|x|^{2p}}{(2p)!} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\pi}}{2^p} \frac{(2p)!}{p!}$$
$$= \frac{|x|^{2p}}{p!} \frac{\sqrt{2\pi}}{2^p} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

▶ Si $n = 2p+1$

$$J_n = \int_0^{+\infty} e^{-u} (2u)^p du = 2^p \Gamma(p+1) = 2^p p!$$

En remarquant que $p = \frac{n-1}{2}$ et avec Stirling on a alors l'équivalent suivant :

$$J_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2}^{n-1} \sqrt{2\pi \frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-1}{2e}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sim \sqrt{\pi(n-1)} \left(\frac{n-1}{e}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

D'où on déduit, encore avec Stirling l'équivalent :

$$\begin{aligned}
\frac{2|x|^n}{n!} J_n &\underset{+\infty}{\sim} \frac{2|x|^n \sqrt{\pi(n-1)}}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{n-1}{e}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{e}{n}\right)^n \\
&\underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2}|x|^n \frac{\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{n}} \frac{e^{n-\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n-1}} \left(\frac{\sqrt{n-1}}{n}\right)^n \\
&\underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}|x|^n e^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}^n \\
&\underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2}|x|^n e^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}^{n+1}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi par comparaison avec une série de Riemann et somme de série convergente la série $\sum \int_{\mathbb{R}} |u_n|$ est convergente ce qui justifie notre inversion.

Références

[1] S. Rostam. Transformée de fourier de la gaussienne. https://perso.ens-rennes.fr/math/people/salim.rostam/files/agreg/Developpements/Transformee%20de%20Fourier%20de%20la%20gaussienne.pdf, Mai 2014.