Kit de survie pour la réduction des matrices carrées

Valentin KILIAN (IPESUP)

1 Changement de base

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

Définition 1.1. *Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice carrée d'ordre n dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimées dans la base $\mathcal{B}$.*

Proposition 1.2. *Quand $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$*

Proposition 1.3. *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de l'espace vectoriel E et $x \in E$. Soit $X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = Mat'_{\mathcal{B}}(x)$ matrices colonnes des coordonnées du vecteur x dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On a alors : $X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}X'$ et $X' = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}X = (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} X$.*

Proposition 1.4. *(Changement de base pour un endomorphisme) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soient $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. On a alors : $A = PA'P^{-1}$ et $A' = P^{-1}AP$*

Définition 1.5. *Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $B = P^{-1}AP$.*

Proposition 1.6. *Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.*

2 Diagonalisation

2.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 2.1. *On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$est une valeur propre de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe un vecteur colonne $U \in \mathbb{R}^n$* ***non nul*** *tel que $AU = \lambda U$.*

Un tel vecteur U non nul est appelé vecteur propre de$A$ associé à la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice A est appelé le spectre de A on note $Sp(A)$.

Notation Soit λ un réel, on notera $E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = \lambda.X\}$

Proposition 2.2. *$E_\lambda = Ker(A - \lambda.I_n)$) est un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.*

Définition 2.3. *Si λ est une valeur propre de la matrice A alors E_λ est appelé espace propre de A associé à la valeur propre λ.*

Proposition 2.4. *λ est une valeur propre de A si et seulement si $E_\lambda \neq \{0_E\}$.*

Remarque

- λ est une valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $A - \lambda.I_n$ n'est pas inversible.
- $f \in \mathcal{L}(E)$ est bijective si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de f.

2.2 Propriétés

Proposition 2.5. *Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres*

Proposition 2.6. *Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.*

Corollaire 2.7. *Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n (resp. une matrice carrée d'ordre n) possède au plus n valeurs propres distinctes.*

Proposition 2.8. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que dans une base $\mathcal{B}$ donnée la matrice de f :*

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & .. & .. & * \\ 0 & \lambda_2 & * & & .. \\ . & 0 & . & . & .. \\ . & & . & . & * \\ 0 & . & . & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Alors $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont les valeurs propres de f.

2.3 Conditions de diagonalisation

Définition 2.9. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.*
• *On dit que f est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que*

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & .. \\ . & 0 & . & . & .. \\ . & & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

notée $Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ matrice diagonale avec les valeurs $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sur la diagonale.
• *Diagonaliser un endomorphisme c'est trouver une telle base.*
• *Soit $\mathcal{B} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ une base de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$ on a : $f(u_i) = \lambda_i u_i$*

Définition 2.10. *Diagonaliser une matrice c'est trouver une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$*

Proposition 2.11. *Si $f \in \mathcal{L}(E)$ possède n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable.*

Théorème 2.12. *(Théorème spectral) Tout matrice symétrique est diagonalisable.*

2.4 Polynôme annulateur

Définition 2.13. *Soit $P : x \mapsto \sum\limits_{i=0}^{n} a_i.x^i$ un polynôme non nul. On dit que P est un polynôme annulateur de la matrice $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ si $P(A) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i.A^i = 0_k$.*

Proposition 2.14. *Soit P un polynôme annulateur d'une matrice A. Toute valeur propre de A est racine de P.*

Remarque : Par conséquent les valeurs propres possibles d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée sont à rechercher dans les racines d'un polynôme annulateur.