Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$
Version préliminaire non relu

Valentin KILIAN
Ecole Normale Supérieure de Rennes

10 août 2022

Les marches aléatoires sont des processus markoviens très étudiés en théorie des probabilités notamment car elles permettent de rendre compte de nombreux phénomènes naturels le plus connus étant probablement le mouvement browniens. Ainsi les marches aléatoires ont de nombreuses applications en physique théorique, en économie et en informatique. Dans de nombreux cas on étudie les marches sur des réseaux réguliers.

Ici on s'intéresse aux marches aléatoires sur les réseaux réguliers les plus simples : les treillis $\mathbb{Z}^d$. Le résultats suivants est un classique de l'agrégation. Il n'existe pas à notre connaissance de démonstration publié de ce résultat mais on peut consulter par exemple [1], cependant dans ce document le rôle essentiel de la dimension du treillis n'est pas justifié de manière satisfaisante. On peut trouver une justification correcte dans cet autre document [2] mais nous en proposons une autre, plus direct, ici.

Théorème 0.1. *Soit $d \in \mathbb{N}^*, (e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $\{\pm e_1, \ldots, \pm e_d\}$. On définie la chaine de Markov $(S_n)_{n\geq}$ par*

$$S_0 = 0 \ \text{ et } \ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

alors le nombre moyen de passages en 0 est fini si et seulement si $d \geq 3$, autrement dit

$$\Sigma := \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{(S_n=0)}\right) < +\infty \Longleftrightarrow d \geq 3$$

Démonstration.
Etape 1 : On a par théorème de Fubini-Tonnelli dans $\overline{\mathbb{R}_+}$:

$$\Sigma = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{(S_n=0)}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(S_n = 0\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(S_{2n} = 0\right)$$

En effet pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}\left(S_{2n+1} = 0\right) = 0$ car on ne peut pas revenir à 0 en un nombre impaire d'étape, il faut se rapprocher autant de fois que l'on s'est éloigné de l'origine.

On considère pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \begin{array}{l} f_n : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} \\ \qquad x \longmapsto \varphi_{S_n}(2\pi x) \end{array} \right.$$

Or, pour $x \in \mathbb{R}^d$, par théorème de transfert,

$$f_n(x) = E\left(e^{2i\pi<S_n,x>}\right) = \sum_{k\in Z^d\cap\bar{B}(0,n)} \mathbb{P}\left(S_n = k\right) e^{2i\pi<k,x>}$$

Puis, comme $\mathbb{Z}^d \cap \bar{B}(0,n)$ est fini, par linéarité de l'intégrale

$$\int_{[0,1]^d} f_n(t)dt = \sum_{k\in Z^d\cap\bar{B}(0,n)} \mathbb{P}\left(S_n = k\right) \underbrace{\int_{[0,1]^d} e^{2i\pi\langle k,x\rangle}dx}_{=\delta_0(k)} = \mathbb{P}\left(S_n = 0\right)$$

De plus, par indépendance et identique distribution des X_k, on a

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(2\pi x) = \left(\varphi_{X_1}(2\pi x)\right)^n$$

On considère maintenant

$$\left| \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad x \longmapsto \varphi_{X_1}(2\pi x) \end{array} \right.$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}^d$, on a, toujours par théorème de transfert,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{2d}\left(e^{2i\pi x_j} + e^{-2\,\mathrm{ii}\pi\, x_j}\right) = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} \cos\left(2\pi x_j\right)$$

En particulier f est à valeurs dans $[-1,1]$ et $f_{2n} = (f^n)^2$ à valeurs positives. Ainsi par Fubini-Tonelli

$$\Sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(S_{2n} = 0\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[0,1]^d} f_{2n}(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[0,1]^d} (f(t))^{2n} dt = \int_{[0,1]^d} \sum_{n=0}^{+\infty} (f(t))^{2n} dt$$

Puis comme $f^2 \neq 1$ presque partout,

$$\Sigma = \int_{[0,1]^d} \frac{1}{1-(f(t))^2} dt$$

Etape 2 : Ainsi on est ramené à l'étude de l'intégralité de $t \longmapsto \frac{1}{1-(f(t))^2}$ sur $[0,1]^d$. Par périodicité de f il suffit d'étudier l'intégrabilité en $t=0$.

Remarquons que $f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\left(1 - 2\pi^2 x_j^2 + o\left(x_j^2\right)\right) = 1 - \frac{2\pi^2}{d}\|x\|_2^2 + o\left(\|x\|_2^2\right)$, d'où

$$(f(x))^2 \underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{2\pi^2}{d}\|x\|_2^2 + o\left(\|x\|_2^2\right)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{4\pi^2}{d}\|x\|_2^2 + o\left(\|x\|_2^2\right)$$

Ainsi

$$1 - (f(x))^2 \underset{x\to 0}{=} \frac{4\pi^2}{d}\|x\|_2^2 + o\left(\|x\|_2^2\right)$$

puis

$$1 - (f(x))^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{4\pi^2}{d}\|x\|_2^2.$$

Ainsi $\frac{1}{1-f^2}$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $\frac{1}{\|x\|_2^2}$ l'est.

Pour $r>0$ notons $V_d(r) = \lambda_d(B_d(r))$ le volume de la boule unité en dimension d. On rappel que par changement de variable on a $V_d(r) = r^d V_d(1)$. Soit $\epsilon > 0$, notons $E = B_d(1) \setminus B_d(\epsilon)$. Enfin notons $g : t \longmapsto \frac{1}{t^2}$

$$\int_E g(\|x\|)dx = \int_E \left(1 - \int_{\|x\|}^{1} g'(t)dt\right) dx$$

$$= (1-\epsilon^d)V_d(1) - \int_E \int_{\|x\|}^{1} g'(t).\mathbb{1}_{t \geq \|x\|}.dx.dt$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} (1-\epsilon^d)V_d(1) - \int_{\|x\|}^{1} g'(t)\left(\int_E \mathbb{1}_{t\geq\|x\|}dx\right)dt$$

$$= (1-\epsilon^d)V_d(1) - \int_{\|x\|}^{1} g'(t)\left(V_d(t) - V_d(\epsilon)\right)dt$$

$$= (1-\epsilon^d)V_d(1) - V_d(1)\int_{\|x\|}^{1} g'(t)\left(t^d - \epsilon^d\right) dt$$

$$\underset{\text{IPP}}{=} (1-\epsilon^d)V_d(1) - V_d(1)\left[g(t)(t^d-\epsilon^d)\right]_\epsilon^1 + V_d(1)\int_{\|x\|}^{1} g(t)d.t^{d-1}dt$$

$$= d.V_d(1)\int_{\|x\|}^{1} \frac{1}{t^{3-d}}dt$$

En faisant $\epsilon \longrightarrow 0$ on constate alors que $x \in \mathbb{R}^d \longmapsto \frac{1}{\|x\|^2}$ est intégrable en 0 si et seulement si $d \geq 3$. Par conséquent $\frac{1}{1-f^2}$ est intégrable sur $[0,1]^d$ si et seulement si $d \geq 3$, ce qui montre bien

$$\Sigma < +\infty \Longleftrightarrow d \geq 3$$

■

Corollaire 0.2. *Si $d \geq 3$ alors presque surement la marche aléatoire part à l'infini ie*

$$\mathbb{P}\left(\|S_n\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\right) = 1$$

Démonstration. Comme $d \geq 3$, on a, d'après le théorème précúdent, $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) < +\infty$. Donc, d'après le lemme de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}\geq n}(S_m = 0)\right) = P\left(\limsup_{n\to+\infty}(S_n = 0)\right) = 0$$

Autrement dit l'état 0 est un état transcient. Or la marche aléatoire est irréductible, donc tous les états sont transcients :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}m\geq n}\bigcup(S_m = k)\right) = 0$$

Ainsi, pour tout $q \in N^*$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}m\geq n}(\|S_m\|_1 < q)\right) = \sum_{k\in B(0,A)\cap Z^d}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}m\geq n}(S_n = k)\right) = 0$$

D'où

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}\geq n}(\|S_m\|_1 \geq q)\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}\geq\geq n}(\|S_m\|_1 < q)\right) = 1 - 0 = 1$$

Ce qui montre bien, par intersection dénombrable d'événements presque sûrs, que

$$\mathbb{P}\left(\|S_n\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{q\in Q_+}\bigcup_{n\in\mathbb{N}m\geq n}(\|S_m\|_1 \geq q)\right) = 1$$

■

Corollaire 0.3. *Si $d \leq 2$ alors presque sûrement la marche passe une infinité de fois par 0, ie*

$$\mathbb{P}(\sup(n \in \mathbb{N}, S_n = 0) = +\infty) = 1$$

Démonstration. On note $T = \sup(n \in \mathbb{N}, S_n = 0)$, alors on a $\mathbb{P}(T < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)$. Or, pour $n \in \mathbb{N}$, par indépendance

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}\left((S_n = 0) \cap \bigcap_{m>n} \left(\sum_{j=n+1}^{m} X_j \neq 0\right)\right) = \mathbb{P}(S_n = 0)\,\underbrace{\mathbb{P}\left(\left(\sum_{j=n+1}^{m} X_j \neq 0\right)\right)}_{=\mathbb{P}\left(\prod_{m>0}\left(\sum_{j=1}^{m} X_j \neq 0\right)\right)}$$

Donc

$$\mathbb{P}(T < +\infty) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{m>0}\left(\sum_{j=1}^{m} X_j \neq 0\right)\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}(T = 0)\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{(S_n - 0)}\right)$$

Or, comme $d \leq 2, \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{(S_n-0)}\right) = +\infty$, donc comme l'égalité précédente a lieu dans $[0, 1]$, on a $\mathbb{P}(T = 0) = 0$ puis $\mathbb{P}(T < +\infty) = 0$. Par consíquent $\mathbb{P}(T = +\infty) = 1$. ∎

Références

[1] D.Cacitti-Holland. Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$.
http://perso.eleves.ens-rennes.fr/%7Edcaci409/marche.pdf, 2021.

[2] C. Kilque and M. Nassif. Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$.
https://agreg-maths.fr/uploads/versions/1279/Marche%20aleatoire%20sur%20Zd.pdf, 2018.