Entrainement au calcul

Valentin KILIAN

19 février 2023

Posologie : 10 min par jour tous les jours

Exercice 1. Préciser sur quel ensemble les fonctions suivantes sont définies et calculer leur dérivée.

1. $f(x) = \tan\left(x^2\right)$
2. $f(x) = \tan\left(x^2 + 3x + 1\right)$
3. $f(x) = 3\sin\left(\frac{3}{2}x^2 + 2\right)$
4. $f(x) = 3x^2\cos(2x+7)$
5. $f(x) = \frac{1}{\sin x}$
6. $f(x) = 5^{x+2}$
7. $f(x) = 7^{x^2-5x+4}$
8. $f(x) = \ln(3x)$
9. $f(x) = \ln\left(\frac{x-5}{x+2}\right)$
10. $f(x) = \frac{\sin(3x)}{\ln x}$
11. $f(x) = \left(\frac{7}{2}\right)^{4x-2}$
12. $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+3}-\left(2x^3-5\right)}{2x-7}$
13. $f(x) = \left(x^5\right)^2 x^3 \sqrt[5]{x^3}$
14. $f(x) = \sqrt[7]{x^2 + 7x^7}$
15. $f(x) = \sin^3\left(4x^7 - 2\right)$
16. $f(x) = \sqrt[5]{\frac{\sin(x^2)}{-3x+e^5}}$
17. $f(x) = \sin\left(\frac{x-2}{2x+3}\right)\cos\left(2x^3\right)$
18. $f(x) = \ln\left(4x^2 - \frac{1}{x}\right)$
19. $f(x) = (\sqrt{7})^{\frac{1}{x}}$
20. $f(x) = \left(\frac{2x^2+4}{3}\right)^{2x+5}$

Exercice 2. Calculer les primitives suivantes par intégration par parties.

1. $\displaystyle\int x^2 \ln x \, dx$
2. $\displaystyle\int x \arctan x \, dx$
3. $\displaystyle\int \ln x \, dx \quad$ puis $\quad \int (\ln x)^2 \, dx$
4. $\displaystyle\int \cos x \exp x \, dx$

Exercice 3. Calculer les primitives suivantes par changement de variable.

1. $\displaystyle\int (\cos x)^{1234} \sin x \, dx$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x} \, dx$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{3 + \exp(-x)} dx$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} dx$

Exercice 4. Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs :

1. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2 - 3x - 4} \, dx$
2. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2 + x + 1} \, dx$
3. $\displaystyle\int \sin^8 x \cos^3 x \, dx$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x} \, dx$
5. $\displaystyle\int \frac{3 - \sin x}{2 \cos x + 3 \tan x} \, dx$

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t \cos(4t) \mathrm{d}t$
2. $\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + a^2}$ avec $a > 0$.
3. $\int_0^1 \frac{t^3}{(t^2+1)^3} \, \mathrm{d}t$ via $u = 1 + t^2$
4. $\int_0^1 \frac{t^7}{(t^4+1)^2} \, \mathrm{d}t$ via $u = 1 + t^4$
5. $\int_0^4 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+1}$ via $u = 1 + \sqrt{t}$
6. $\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{-t}} \, \mathrm{d}t$ via $u = e^t$

7. $\int_0^4 e^{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$ via $u=\sqrt{t}$
8. $\int_a^{\frac{1}{a}} \frac{1-t^2}{(t^2+1)\sqrt{1+t^4}}\, \mathrm{d}t, a>0$ fixé via $u=\frac{1}{t}$
9. $\int_0^1 \frac{\ln\left(1+e^t\right)}{1+e^{-t}}\, \mathrm{d}t$ via $u=1+e^t$
10. $\int_0^{10} \frac{t}{(t^2+2)(t^2+1)} \mathrm{d}t$ via $u=t^2$
11. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)}{t(1+t)} \mathrm{d}t$ via $u=\frac{t}{t+1}$
12. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}\, \mathrm{d}t$ via $u=\cos t$
13. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \cos\left(\frac{t}{1+t^2}\right) \frac{\ln t}{t}\, \mathrm{d}t$ via $u=\frac{1}{t}$

Exercice 6. Déterminer les limites lorsque n tend vers l'infini des suites ci-dessous ; pour chacune, préciser en quelques mots la méthode employée.

1. $2/1\,;\ 4/3\,;\ 6/5\,;\ \ldots;\ 2n/(2n-1)\,;\ \ldots$
2. $0{,}23\ ;\ 0{,}233\ ;\ \ldots\ ;\ 0{,}233\cdots3\ ;\ \ldots$
3. $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}$
4. $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$
5. $\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
6. $\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
7. $\left(1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n\right)$
8. $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$
9. $\dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}$
10. Démontres la formule $1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$; déduis-en
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$$

Exercice 7. Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

a) $\lim_{x\to0}\frac{x^2+2\,|x|}{x}$ *b*) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2\,|x|}{x}$ *c*) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-3\,x+2}$

d) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ *e*) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ *f*) $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^n-1}$

Exercice 8. Trouves pour $(a,b)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$:
$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 9. Déterminer les limites suivantes, en justifiant tes calculs.

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+2}{x^2 \ln x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-2x^2+3}{x\ln x}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(3x+1)}{2x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^x-1}{\ln(x+1)}$
7. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2}{x+1}\ln\Big(\dfrac{x^3+4}{1-x^2}\Big)$
8. $\lim\limits_{x\to (-1)^+} (x^2-1)\ln(7x^3+4x^2+3)$
9. $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)^2\ln(x^3-8)$
10. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x(x^x-1)}{\ln(x+1)}$
11. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x\ln x - x\ln(x+2))$
12. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x-e^{x^2}}{x^2-x}$
13. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x}$
14. $\lim\limits_{x\to +\infty} \Big(\dfrac{x+1}{x-3}\Big)^x$
15. $\lim\limits_{x\to +\infty} \Big(\dfrac{x^3+5}{x^2+2}\Big)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$
16. $\lim\limits_{x\to +\infty} \Big(\dfrac{e^x+1}{x+2}\Big)^{\frac{1}{x+1}}$
17. $\lim\limits_{x\to 0^+} \big(\ln(1+x)\big)^{\frac{1}{\ln x}}$
18. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}}$
19. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$
20. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$

Exercice 10. Calculer un équivalent en 0 des expressions suivantes :

1. $\sqrt{\frac{4}{x}+1}\ln\left(1-\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1}}{\frac{1}{x}+2}\right)$
2. $\exp\left(x^2\right)-\exp\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2}\right)$
3. $\frac{(1-\cos x)\arctan x}{x\tan x}$
4. $\frac{\sin(1-\cos x)}{\tan x^2}$
5. $\frac{1-\cos(3x)}{(x+x\sin x)^2}-1$
6. $\frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2-x^4}$
7. $(\sin x+\cos x)^x$
8. $x(3+x)\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$
9. $(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$
10. $\frac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$
11. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$
12. $\frac{\ln(\cos x)}{1-\cos 2x}$
13. $\tan x-\sin x$

Exercice 11 (Recherche d'équivalents)**.** Donner des équivalents simples pour les fonctions suivantes :

1. $2e^x-\sqrt{1+4x}-\sqrt{1+6x^2}$, en 0
2. $(\cos x)^{\sin x}-(\cos x)^{\tan x}$, en 0
3. $\arctan x+\arctan\frac{3}{x}-\frac{2\pi}{3}$, en $\sqrt{3}$
4. $\sqrt{x^2+1}-2\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt[4]{x^4+x^2}$, en $+\infty$
5. $\operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$, en 0

Source : Exo7